Rozdział 2

Ruch i kinematyka

2.1. Ruch, gradient prędkości, tensor prędkości odkształcenia, wirowość

Ruchem ciała $\mathbb{B}$ nazywamy dostatecznie gładko zależne od czasu t jego odkształcenie $\boldsymbol{\zeta}_t$, tzn.

$$\mathbb{B} \ni \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{\zeta}_t(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\zeta}_t(\mathbb{B}) \subset \mathbb{E}^3 \tag{2.1}$$

Zamiast $\boldsymbol{\zeta}_t(\boldsymbol{X})$ będziemy pisać $\boldsymbol{\zeta}(t, \boldsymbol{X})$, tj.

$$\boldsymbol{\zeta}_t(\boldsymbol{X}) \equiv \boldsymbol{\zeta}(t, \boldsymbol{X})$$

lub, gdy nie ujawniamy argumentu $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{\zeta}_t(\cdot) = \boldsymbol{\zeta}(t, \cdot). \tag{2.2}$$

Odwzorowanie $\boldsymbol{\zeta}(\cdot, \cdot)$ nazywa się tradycyjnie *funkcją ruchu*; dla ustalonego czasu t $\boldsymbol{\zeta}(t, \cdot)$ ma odwzorowanie odwrotne, które oznaczamy $\boldsymbol{\zeta}_t^{-1}(\cdot)$, oczywiście dla $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\zeta}(t, \boldsymbol{X})$

$$\boldsymbol{\zeta}_t^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\zeta}^{-1}(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

W ogólności (por. Arnold (1981), s. 12–16, 117-122, 126–132; Rymarz (1993), s. 24, 39-40) ruch ciała materialnego traktuje się jako złożenie:

— jego *ruchu sztywnego*, czyli zmiany położenia jako *ciągłego ciała sztywnego* (por. s. 14, określenie ciągłego ciała materialnego) *w czasie i przestrzeni*

— jego *odkształcenia gładko zależnego od czasu.*

W naszych rozważaniach będziemy zajmować się ruchem ciał *abstrahując od ich ruchów sztywnych*, bowiem odgrywają one rolę drugoplanową (por. Rymarz (1993), s. 40).

Zgodnie z motywacją empiryczno-racjonalną przedstawioną w wstępie do Podrozdziału 1.4, ruchy ciała $\mathbb{B}$ będziemy opisywać również względem *ustalonej konfiguracji odniesienia* $\mathbb{B}_\varkappa = \varkappa(\mathbb{B})$.

Zatem ruch $\boldsymbol{\zeta}_t$ ciała $\mathbb{B}$ dany relacjami (2.1)–(2.3) i jego funkcją $\boldsymbol{\zeta}(\cdot,\cdot)$ zastępuje się (por. wzory (1.44)–(1.49)) ruchem $\boldsymbol{\chi}_t = \boldsymbol{\zeta}_t \circ \varkappa^{-1}$ i funkcją ruchu $\boldsymbol{\chi}(\cdot,\cdot) = \boldsymbol{\zeta}(\cdot, \varkappa^{-1}(\cdot))$ względem konfiguracji odniesienia $\mathbb{B}_\varkappa$ ciała $\mathbb{B}$; wobec tego mamy

$$\mathbb{B}_\varkappa \ni \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{\chi}_t(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}_t \equiv \boldsymbol{\chi}_t(\mathbb{B}_\varkappa) = \boldsymbol{\zeta}_t(\mathbb{B}) \tag{2.4}$$

$$\mathbb{B}_\varkappa \ni X \to \boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}_t \equiv \boldsymbol{\chi}(t, \mathbb{B}_\varkappa) = \boldsymbol{\zeta}_t(\mathbb{B}) \tag{2.5}$$

gdzie $\mathbb{B}_t$ nazywamy *konfiguracją ciała* $\mathbb{B}$ *w chwili* t *podczas jego ruchu* $\boldsymbol{\chi}$, lub krótko *konfiguracją aktualną.*

Pole prędkości w ruchu $\boldsymbol{\chi}$ ciała $\mathbb{B}$ jest określone wozorami

— w opisie materialnym (por. 3.17):

$$\mathbb{B}_\varkappa \ni \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\chi}'_t(t, \boldsymbol{X}) \tag{2.6}$$

— w opisie przestrzennym (por. s. 16):

$$\mathbb{B}_t \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{\chi}^{-1}(t, \boldsymbol{x})). \tag{2.7}$$

Gradient odkształcenia ciała $\mathbb{B}$ w jego ruchu $\boldsymbol{\chi}$ określa się (por. wzory (1.10)–(1.12), (1.44)–(1.47)) wzorem

$$\mathbb{F}(t, \boldsymbol{X}) = \nabla_X \boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{X}) \tag{2.8}$$

i względem przyjętego w przestrzeni $\mathbb{E}^3$ układu współrzędnych wyraża się macierzą kwadratową w wymiarach 3×3 postaci

$$\mathbb{F}(t, \boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \chi^{1'}_{|X^1}(t, \boldsymbol{X}), & \chi^{1'}_{|X^2}(t, \boldsymbol{X}), & \chi^{1'}_{|X^3}(t, \boldsymbol{X}) \\ \chi^{2'}_{|X_1}(t, \boldsymbol{X}), & \chi^{2'}_{|X^2}(t, \boldsymbol{X}) & \chi^{2'}_{|X^3}(t, \boldsymbol{X}) \\ \chi^{3'}_{|X^1}(t, \boldsymbol{X}), & \chi^{3'}_{|X^2}(t, \boldsymbol{X}), & \chi^{3'}_{|X^3}(t, \boldsymbol{X}) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Dla pola prędkości $\boldsymbol{v}$ w ruchu $\boldsymbol{\chi}$ ciała $\mathbb{B}$ określa się również jego gradient $\nabla_x \boldsymbol{v}$, który w układzie współrzędnych $\mathbb{E}^3$ wyraża się macierzą

$$(\nabla_x \boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} v^{1\ \prime}_{|x^1}(t,\boldsymbol{x}), & v^{1\ \prime}_{x^2}(t,\boldsymbol{x}), & v^{1\ \prime}_{|x^3}(t,\boldsymbol{x}) \\ v^{2\ \prime}_{|x^1}(t,\boldsymbol{x}), & v^{2\ \prime}_{|x^2}(t,\boldsymbol{x}), & v^{3\ \prime}_{|x^3}(t,\boldsymbol{x}) \\ v^{3\ \prime}_{|x^1}(t,\boldsymbol{x}), & {}^{3\ \prime}_{|x^2}(t,\boldsymbol{x}), & v^{3\ \prime}_{|x^3}(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Mając na uwadze określenie pola prędkości (2.7) oraz $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{X})$ wyrażamy wyraz o wkaźnikach j,k macierzy (2.10) przez funkcję ruchu i jej różniczkowanie wzorem

$$(\nabla_x \boldsymbol{v})^j_k(t,\boldsymbol{x}) = \chi^{j\ \prime\prime}_{|t|X^\alpha}(t,\chi^{-1}(t,\boldsymbol{x}))\cdot(\chi^{-1})^{\alpha\ \prime}_{|x^k}(t,\boldsymbol{x}) \tag{2.11}$$

stąd wynika związek

$$(\nabla_x \boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x}) = \mathbb{F}'_{|t}(t,\chi^{-1}(t,\boldsymbol{x}))\mathbb{F}^{-1}(t,\boldsymbol{x}) \tag{2.12}$$

bowiem gładkość funkcji ruchu χ pozwala przestawiać pochodne cząstkowe względem t i X^α.

Wzór ten pozwala wyznaczyć prędkość gradientu odkształcenia $\mathbb{F}'_{|t}(t,\boldsymbol{X})$ za pomocą gradientu prędkości $\nabla_x \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})$ w ruchu $\boldsymbol{\chi}$ ciała $\mathbb{B}$.

Uwaga 2.1. Gradient prędkości $(\nabla_x \boldsymbol{v})(\cdot,\cdot)$ jest tensorem, którego składowe są dane macierzą (2.10). Tensor ten można przestawić w postaci sumy

$$(\nabla_x \boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{x}) \tag{2.13}$$

gdzie $\boldsymbol{d}(\cdot,\cdot)$ i $\boldsymbol{\omega}(\cdot,\cdot)$ oznaczają jego część symetryczną i antysymetryczną odpowiednio, tj.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) &\equiv (\nabla_x \boldsymbol{v})_{sym}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}((\nabla_x \boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x}) + (\nabla_x \boldsymbol{v})^*(t,\boldsymbol{x})) \\ &\equiv (\frac{1}{2}(v^{j\ \prime}_{|x^k}(t,\boldsymbol{x}) + v^{k\ \prime}_{|x^j}(t,\boldsymbol{x})))_{j,k=1,2,3} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{x}) &\equiv (\nabla_x \boldsymbol{v})_{as}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}((\nabla_x \boldsymbol{v})(t,\boldsymbol{x}) - (\nabla_x \boldsymbol{v})^*(t,\boldsymbol{x})) \\ &\equiv (\frac{1}{2}(v^{j\ \prime}_{|x^k}(t,\boldsymbol{x}) - v^{k\ \prime}_{|x^j}(t,\boldsymbol{x})))_{j,k=1,2,3} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Część symetryczna $\boldsymbol{d}(\cdot,\cdot)$ *gradientu prędkości* $(\nabla_x \boldsymbol{v})(\cdot,\cdot)$ *wyraża prędkość zmiany elementu długości* (por. wzory (1.4), (1.5), (1.32), (1.38), (1.42)) *krzywej materialnej* $\mathbb{C}_t = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbb{C}_\varkappa)$ *gdzie* $\mathbb{C}_\varkappa$ *jest regularną i dostatecznie gładką krzywą w konfiguracji odniesienia* $\mathbb{B}_\varkappa$, tzn.

$$\mathbb{C}_\varkappa = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{B}_\varkappa : \boldsymbol{X} = \hat{X}(z),\ z \in \mathbb{I},\ \hat{X}(\cdot) \in C^r(\mathbb{I}), \quad r > 2\}.$$

Aby to wykazać rozważmy kwadrat elementu długości tej krzywej jako funkcję zmiennej t, tj.

$$(dl)^2(t,\boldsymbol{x})_{|x=\chi(t,\hat{X}(z))} = \sum_{j=1}^{3}((\chi^j(t,\hat{X}(z))'_{|z})^2(dz)^2 \tag{2.16}$$

i jego pochodną względem zmiennej t, która wyraża się (por. (2.6), (2.7), (2.14)) wzorem

$$\begin{aligned}
&((dl)^2(t,\boldsymbol{x})_{|x=\chi(t,\hat{X}(z))})'_{|t}\\
&= 2\cdot(\chi^j(t,\hat{X}(z))'_{|z}\cdot(V^j(t,\hat{X}(z)))'_{|z}(dz)^2\\
&= 2\cdot(\chi^j(t,\hat{X}(z)))'_{|z}\cdot(v^{j\,'}_{|x^k}(t,\boldsymbol{x}))_{|x=\chi(t,\hat{X}(z))}\cdot(\chi^k(t,\hat{X})))'_{|z}(dz)^2\\
&= 2(\boldsymbol{dx}\cdot(\boldsymbol{d}(t,x)\cdot\boldsymbol{dx}))_{|x=\chi(t,\hat{X}(z))}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

gdzie $\boldsymbol{dx} = (dx^1, dx^2, dx^3)$ pierwsza „$\cdot$” oznacza mnożenie skalarne w $\mathbb{E}^3$, a druga „$\cdot$” oznacza mnożenie kolumny $(\boldsymbol{dx})^*$ przez macierz $\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})$ według reguły „wiersz $\times$ kolumna”.

Zatem tensor $\boldsymbol{d}(\cdot,\cdot)$ jest *miarą prędkości zmian kwadratu elementu długości* krzywej materialnej $\mathbb{C}_t$ i dlatego nosi nazwę *tensora prędkości odkształcenia ciała* $\mathbb{B}$ *w jego ruchu* $\boldsymbol{\chi}$. Tym sposobem stwierdzenie wyrażone po równości (2.15) jest udowodnione.

Jeżeli ciało materialne $\mathbb{B}$ *porusza się jak ciało sztywne* (por. Arnold (1981), s. 119–121), *to wówczas tensor prędkości odkształcenia* $\boldsymbol{d}(\cdot,\cdot)$ *znika*, tj.

$$\boldsymbol{d}(\cdot,\cdot) = 0 \quad \text{w} \quad \mathbb{B}_t. \tag{2.18}$$

gdy $t > 0$.

Istotnie, ponieważ w takim ruchu ciała materialnego $\mathbb{B}$ $dl(t,\boldsymbol{x}) = \text{const}$ wobec tego na mocy równości (2.17) mamy już tezę tego stwierdzenia.

Udowodnimy jeszcze stwierdzenie odwrotne: *jeżeli w ruchu* $\boldsymbol{\chi}$ *ciała* $\mathbb{B}$ *tensor prędkości odkształcenia* $\boldsymbol{d}(\cdot,\cdot)$ *znika*, tj. (2.18), *Wówczas w danej chwili* t *ciało* $\mathbb{B}$ *porusza się jak ciało sztywne.*

Istotnie, z równości (2.18) i wzoru (2.14) mamy układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu liniowy

$$\begin{aligned}
&v^{j\,'}_{|x^j}(t,\boldsymbol{x}) = 0 \qquad j = 1,2,3\\
&v^{j\,'}_{|x^k}(t,\boldsymbol{x}) = -v^{k\,'}_{|x^j}(t,\boldsymbol{x}) \qquad j \neq k = 1,2,3
\end{aligned} \tag{2.19}$$

który jest układem nadokreślionym (bo liczba równań jest 6, a niewiadomymi funkcjami w tym układzie są 3 składowe v^1, v^2, v^3 pola prędkości $\boldsymbol{v}$) i jego rozwiązania (o ile istnieją) są w klasie funkcji $C^{r-1}(\mathbb{B}_t)$ $r > 2$.

Z równań układu (2.19) po stosowanym zróżniczkowaniu ich i dzięki $(2.19)_1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} v^{j''}_{|x^k x^j} &= -v^{k''}_{|x^j x^j} \\ \Delta_x v^k &= -(\mathrm{div}\boldsymbol{v})'_{|x^k} \equiv 0 \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{2.20}$$

w konfiguracji aktualnej $\mathbb{B}_t$. Zatem składowe $v^1(t,\cdot)$, $v^2(t,\cdot)$, $v^3(t,\cdot)$ prędkości $\boldsymbol{v}(t,\cdot)$ są funkcjami harmoniczymi w $\mathbb{B}_t$, a zatem w tym obszarze są analitycznymi funkcjami zmiennej $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$.

Rozważmy funkcję skalarną φ określną wzorem

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = x^j v^j(t, \boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.21}$$

Funkcja ta jest również funkcją harmoniczną w obszarze $\mathbb{B}_t$, a zatem i analityczną w tym obszarze względem zmiennych $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ i na mocy równań $(2.19)_2$ spełnia równości

$$\varphi'_{|x^j}(t, \boldsymbol{x}) = v^j(t, \boldsymbol{x}) + x^k v^{k'}_{|x^j}(t, \boldsymbol{x}) = v^j(t, \boldsymbol{x}) + x^k v^{j'}_{|x^k}(t, \boldsymbol{x}) \quad j = 1, 2, 3.$$

Stąd otrzymujemy tożsamość

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = x^j \varphi'_{|x^j}(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.23}$$

z której wynika, iż funkcja skalarna φ jest względem zmiennych $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ jednorodna stopnia pierwszego, tzn.

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \alpha(t) = x^j \alpha^j(t) \tag{2.24}$$

gdzie funkcje $\alpha^1(\cdot), \alpha^2(\cdot), \alpha^3(\cdot)$ są klasy C^{r-1}, $r > 2$.

Zatem na mocy (2.21) i przedstawienia (2.24) oraz analityczności w obszarze $\mathbb{B}_t$ składowych $v^1(t,\cdot)$, $v^2(t,\cdot)$, $v^3(t,\cdot)$ prędkości $\boldsymbol{v}(t,\cdot)$ wynika, iż składowe te są również funkcjami jednorodnymi stopnia pierwszego względem zmiennej $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ z dokładnością do składników $\alpha^1(t)$, $\alpha^2(t)$, $\alpha^3(t)$ odpowiednio, tzn.

$$v^j(t, \boldsymbol{x}) = A^j_k(t) x^k + \alpha^j(t) \tag{2.25}$$

$j = 1, 2, 3$, przy czym współczynniki $A^j_k(t)$ na mocy rónań układu (2.19) spełniają równości

$$A^j_j(t) \equiv 0, \qquad A^j_k(t) = -A^k_j(l) \tag{2.26}$$

dla $j = 1, 2, 3$ i $j \neq k = 1, 2, 3$.

Zatem pole prędkości $\boldsymbol{v}$, które spełnia układ równań (2.19), ma przedstawienie

$$\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \alpha(t) \tag{2.27}$$

gdzie $\mathbb{A}(t)$ jest macierzą o wymiarach 3×3, której wyrazy $A^j_k(t)$ spełniają równości (2.26), czyli jest antysymetryczną, tzn.

$$\mathbb{A}(t) = -\mathbb{A}^*(t)$$

a $\alpha(t)$ jest wektorem o skadowych $\alpha^1(t)$, $\alpha^2(t)$, $\alpha^3(t)$.

Wyrazy tej macierzy możemy na mocy przedstawienia (2.27) i równań układu (2.19) wyrazić wzorami

$$\begin{aligned} A^1_2(t) &= -\frac{1}{2}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_3(t) \\ A^1_3(t) &= \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_2(t) \\ A^2_3(t) &= -\frac{1}{2}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_1(t) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Jak wiadomo z mechaniki klasycznej (por. Arnold (1981), s. 119–120) każda macierz antysymetryczna wyznacza w przestrzeni $\mathbb{E}^3$ wektor prędkości kątowej. Zatem macierz $\mathbb{A}(t)$ dana wzorami (2.28) wyznacza wektor prędkości kątowej, który jest identyczny z wektorem

$$\frac{1}{2}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})(t)$$

bowiem mamy

$$\mathbb{A}(t)x = \left(\frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\right)(t) \times \boldsymbol{x} \tag{2.29$_1$}$$

Pole rotacji pola wektorowego prędkości $\boldsymbol{v}$ nazywa się *wirowością ruchu* $\boldsymbol{\chi}$ *i oznacza się symbolem*

$$\boldsymbol{w}(t,x) = (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})(t,x). \tag{2.29$_2$}$$

Zatem, przedstawienie pola prędkości $\boldsymbol{v}(\cdot,\cdot)$ w przypadku, gdy tensor prędkości odkształcenia $\boldsymbol{d}(\cdot,\cdot)$ znika w obszarze $\mathbb{B}_t$ ma na mocy wzorów (2.27), $(2.29)_1$, $(2,29)_2$ postać

$$\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}(t) \times \boldsymbol{x} + \alpha(t) \tag{2.30}$$

która kończy dowód stwierdzenia odwrotnego ze s. 38.